



## 1 Fonction logarithme népérien

### Définition

La fonction logarithme népérien on note **ln** est la primitive de la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1.

### Résultats:

- ♠  $x \rightarrow \ln(x)$  est défini et continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$
- ♠  $x \rightarrow \ln(x)$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ ; et on a  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ;  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- ♠  $x \rightarrow \ln(x)$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  car  $\forall x \in ]0; +\infty[; \frac{1}{x} > 0$
- ♠ **Signe de la fonction ln:**
  - \*  $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
  - \*  $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
  - \*  $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		-	0
			+

### propriétés

$$(\forall a > 0); (b > 0); (r \in \mathbb{Q}^*)$$

$$* \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$* \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a)$$

$$* \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$* \ln(a^r) = r \times \ln(a)$$

$$(\forall xy > 0)$$

$$* \ln(x \times y) = \ln(|x|) + \ln(|y|)$$

$$* \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(|x|) - \ln(|y|)$$

$$(\forall x > 0); (\forall y > 0)$$

$$* \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$* \ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$$

## 2 Étude de la fonction $\ln$ .

### 2.1 Limites usuelles et Les Branches infinies

#### propriétés

♣  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  Donc  $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'axe des ordonnées est une asymptote verticale} \\ \text{à la courbe de la fonction } \ln \end{array} \right.$

♣ On a  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\}$  Donc  $\left\{ \begin{array}{l} \text{la courbe de la fonction } \ln \text{ admet une} \\ \text{branche parabolique de direction l'axe} \\ \text{des abscisses au voisinage de } +\infty \end{array} \right.$

\*  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

\*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

\*  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 ; (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$

\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 ; (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$

### 2.2 Tableau de variation de la fonction $\ln$ .

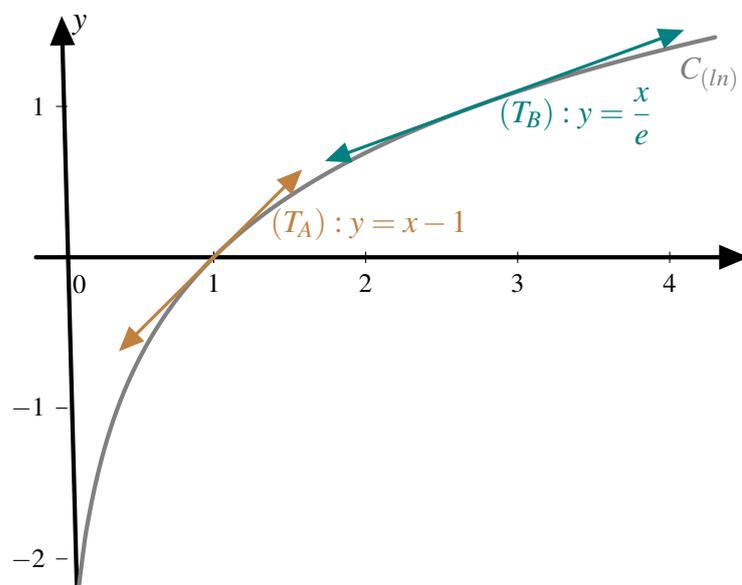
$x$	0	1	$+\infty$
$(\ln(x))'$		+	
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

### 2.3 Construction de la courbe de fonction $\ln$ .

#### Conséquences

♠ La tangente  $(T_A)$  à la courbe de la fonction  $\ln$  au point  $A(1;0)$  a pour équation:  $y = x - 1$

♠ La tangente  $(T_B)$  à la courbe de la fonction  $\ln$  au point  $B(e;1)$  a pour équation:  $y = \frac{1}{e}x$



## 2.4 Dérivée de la fonction logarithmique

### Propriété:1

Si  $g$  est une fonction numérique dérivable sur un intervalle  $I$  et  $((\forall x \in I); g(x) \neq 0)$ , alors la fonction  $f : x \mapsto \ln|g(x)|$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $((\forall x \in I); \ln(|g(x)|)' = \frac{g(x)'}{g(x)})$

### Propriété:2

Si  $g$  est une fonction numérique dérivable sur un intervalle  $I$  et  $((\forall x \in I); g(x) \neq 0)$ , Les primitives de la fonction  $x \mapsto \frac{g(x)'}{g(x)}$  sont les fonction  $x \mapsto \ln|g(x)| + k$  où  $k \in \mathbb{R}$

## 2.5 Fonction logarithmique de base a ( $a > 0$ et $a \neq 1$ )

### Définition

La fonction logarithme de base  $a$  noté  $\log_a$  est définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

### Conséquences

- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(e) = \frac{1}{\ln(a)}$
- $\log_a(1) = 0$
- $((\forall x \in ]0; +\infty[); \log_e(x) = \ln(x))$

### Propriétés

$(\forall x, y \in ]0; +\infty[)$  et  $(a > 0$  et  $a \neq 1)$  On a:

$$* \log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$* \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$* \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$* \log_a(x^r) = r \times \log_a(x)$$